



*Las opiniones y los contenidos de los trabajos publicados son responsabilidad de los autores, por tanto, no necesariamente coinciden con los de la Red Internacional de Investigadores en Competitividad.*



Esta obra por la Red Internacional de Investigadores en Competitividad se encuentra bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 3.0 Unported. Basada en una obra en riico.net.

## Teoría de Juegos Aplicada a las Pensiones en México

DENISE GÓMEZ HERNÁNDEZ<sup>1</sup>  
IGNACIO ALMARAZ RODRÍGUEZ\*  
HUMBERTO BANDA ORTIZ\*

### Resumen

Este trabajo presenta la aplicación del modelo de Hotelling de teoría de juegos al sistema de ahorro para el retiro en México. Para ello, se muestra una función de utilidad del trabajador la cual consiste en calcular el exceso del rendimiento neto por AFORE con el rendimiento del índice de precios y cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores. El estudio se realiza para el período de Marzo de 2009 a Julio de 2013 y para las 12 AFORES existentes a ese periodo. Los resultados muestran que un trabajador adverso al riesgo podrá decidirse por Inbursa, mientras que si es amante al riesgo su mejor opción será Invercap y podrá elegir a Afirme Bajío, Azteca o Coppel si busca una relación óptima entre su volatilidad y rendimiento. Por último, se muestra la demanda por AFORE para visualizar que la toma de decisiones no está basada en los componentes presentados.

**Palabras clave:** AFORES, Teoría de Juegos, Hotelling, Función de Utilidad.

### Abstract

This work presents an application of the Game Theory Model called “Hotelling” to the retirement savings system in Mexico. In order to do this, it is shown the worker's utility function, which consists of calculating the excess of the net income per AFOREs with the performance of the index of prices and market rates of the Mexican Stock Exchange. The data used for this study was for the period of March 2009 to July 2013. Also, the existing 12 AFORES to date were compared. The results show that a risk-averse worker may choose Inbursa, while a risk-lover will choose Invercap. Also, it is found that Afirme-Bajío, Coppel and Azteca can be chosen by a worker based on the relation risk-performance. Finally, we show the AFORES' demand to view that the decision-making by the workers in Mexico is not based on the components presented.

**Keywords:** AFORES, Game Theory, Hotelling, Utility Function

---

<sup>1</sup>\* Universidad Autónoma de Querétaro-Facultad de Contaduría y Administración

## Teoría de Juegos

### *1.1 Introducción*

La toma de decisiones se presenta como uno de los grandes temas de la cotidianidad, desde el actuar personal, hasta la dinámica de interacción en el hogar, en el sector empresarial y gubernamental. La complicación surge desde decisiones simples como que automóvil comprar, cómo invertir nuestros ahorros, qué producto lanzar al mercado hasta complejas decisiones de política económica y social. Es por ello que al momento de tomar una decisión u optar por una estrategia, debemos valorar las alternativas en función de nuestras preferencias y el impacto sobre otras personas, procurando optar por la más fuerte o la más conveniente en el momento.

Quizá, muchas de las complicaciones financieras actuales encuentran sustento en problemas sociales e individuales como la falta de información, análisis, educación, tradiciones e incluso el exceso de confianza en nuestro “sentido común”. Es entonces, cuando la aplicación de la Teoría de Juegos presenta medios de solución asequible y real para problemas de índole práctica.

La teoría de juegos moderna, surge a partir de la obra de John Von Neumann y Oskar Morgenstern (*Theory of Games and Economic Behavior*, 1944). Ésta está definida como una disciplina matemática, la cual, mediante el uso de modelos de interacciones estratégicas entre jugadores, analiza situaciones de conflicto y cooperación entre tomadores de decisiones racionales (Myerson, 1991). A su vez, intenta modelar cómo las decisiones (estrategias) de los jugadores afectan y son afectadas por las decisiones del resto.

La teoría de juegos, fundamentada en la teoría de decisiones, considera para un juego tradicional un conjunto de jugadores racionales e inteligentes, un conjunto de estrategias, una distribución de probabilidad y un pago asignado para cada combinación de estrategias, buscando simular en todo momento, la naturaleza de la cooperación humana en cuanto a la maximización de sus beneficios. Por ello, la teoría de juegos se ha encontrado en una gran diversidad de campos que van desde la Economía, la Biología y el Derecho hasta la Política y la Computación, con una amplia gama de aplicaciones.

Durante los años 50's y 60's, surgieron una gran cantidad de artículos de investigación que proponían novedosas aplicaciones a situaciones económicas sustentadas en los modelos económicos reinantes en la época. Siendo el brillante desarrollo del matemático norteamericano John Nash

(1951), quién estableció el “*equilibrio de Nash*”, como concepto de equilibrio estándar para juegos no cooperativos de  $n$  jugadores y de suma no constante, el que diera el mayor impulso al desarrollo y aplicación de la teoría de juegos en situaciones reales.

Una nueva innovación se da con los trabajos de Harsanyi (1967), quien desarrolla la teoría para los juegos con información incompleta. Los cuales, de acuerdo a Meca Martínez (s.f.) “*abrieron un inmenso panorama de aplicación en el Análisis Económico y son la base a partir de la cual se desarrolla la llamada economía de la información*” (p. 18).

En la actualidad, cinco renombrados investigadores han recibido el premio Nobel de Economía, el mayor reconocimiento académico en el medio, por sus importantes aportaciones en el campo de la teoría de juegos. En 1994, se concedió a tres de sus primeros y más importantes creadores: John Harsanyi, John Nash y Reinhard Selten. En 2005, se concedió a los profesores R.J. Aumann y T.C. Schelling por sus aportaciones a la comprensión del conflicto y la cooperación mediante el análisis de la Teoría de Juegos.

Es así, que el estudio de la teoría de juegos se ha convertido en un pilar fundamental en la formación del economista moderno. Su aplicación, como forma de análisis, basada en la observación de problemas económicos sustentados en la teoría y la matemática aplicada, permiten una profundización en el estudio de las interacciones de los agentes económicos, buscando pronosticar su comportamiento conjunto dada una estructura de incentivos con el único objetivo de lograr establecer las estrategias óptimas que permitan la existencia de equilibrios.

### *1.3 Nociones Generales de Juegos*

La teoría de juegos moderna, surge a partir de Von Neumann (1944) con la publicación de su obra *Theory of Games and Economic Behavior*. Myerson (1985) definió a la teoría de juegos como una disciplina matemática, la cual analiza situaciones de conflicto y cooperación entre tomadores de decisiones racionales mediante el uso de modelos de interacciones estratégicas entre jugadores. La teoría de juegos intenta modelar las decisiones o estrategias de los jugadores que afectan y son afectadas por las decisiones de otros jugadores.

La teoría de juegos se fundamenta en la teoría de decisiones y considera para un juego tradicional a un conjunto de jugadores racionales, un conjunto de estrategias, una distribución de probabilidad y un pago asignado para cada combinación de posibles estrategias. Asimismo, la teoría de juegos

busca simular en todo momento la naturaleza de la cooperación humana en cuanto a la maximización de los beneficios.

Los juegos se clasifican de acuerdo a dos criterios:

- i) Según el *timing* de las jugadas: En juegos estáticos o juegos dinámicos.
- ii) Según la *certidumbre* sobre los pagos: En juegos con información completa o información incompleta.

Los *Juegos Dinámicos con Información Completa* son también conocidos como juegos secuenciales. Esta clase de juegos permiten a los jugadores tomar decisiones de maneras sucesivas, simultáneas o ambas en un mismo desarrollo. Debido a la condición de información completa, las funciones de pago, la estructura del juego y todas las decisiones posteriores a la nueva toma de decisión son información del dominio público. La forma de representación natural de los juegos dinámicos finitos es la extensiva.

Los *Juegos con Información Perfecta e Imperfecta* son una variante en los juegos con información completa. Decimos que  $G$  es de información perfecta si cada conjunto de información de cualquiera de sus jugadores es unitario. Si, por el contrario, existe un jugador con algún conjunto de información no unitario, decimos que el juego es de información imperfecta.

Los *Juegos Estáticos con Información Completa* se consideran los modelos más simples de juegos y se representan tradicionalmente en forma estratégica debido a que los jugadores toman sus decisiones de forma simultánea, o bien, eligen su estrategia sin conocer las decisiones de los demás. Un juego tiene información completa cuando la función de pagos de todos los participantes es de dominio público. Es en este tipo de juego en el que basaremos nuestro análisis en esta ponencia por lo que si el lector desea referirse a la teoría de información incompleta y sus aplicaciones, se recomienda revisar a Harsanyi (1967, 1968), Aumann y Maschler (1967, 1968) Akerlof (1970), Mertens y Zamir (1982), Myerson (1984a, 1984b, 1985), entre otros.

Para solucionar los juegos estáticos con información completa, descritos en el párrafo anterior, se pueden utilizar dos tipos de argumentos, los basados en dominación de estrategias y otros basados en argumentos de equilibrio. La solución mediante argumentos de dominación supone que un jugador racional no juega o usa estrategias dominadas, y menos aún juegan estrategias estrictamente dominadas. Dentro de esta primera forma de solución, se encuentra la *Eliminación Iterativa de*

*Estrategias*, en la cual, dado un juego finito o infinito  $G = \{S_1, S_2, \dots, S_n; u_1, u_2, \dots, u_n\}$ , realizamos una eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas, es decir, cada uno de los jugadores eliminan las estrategias que estén estrictamente dominadas en el juego inicial  $G$ , construyen un juego reducido  $G_1$ . Luego, cada jugador elimina las estrategias que estén estrictamente dominadas en el juego reducido  $G_1$  y construyen un nuevo juego reducido  $G_2$ . El proceso se repite hasta obtener el conjunto de estrategias iterativamente no dominadas.

A diferencia de las soluciones argumentadas en dominancia débil o fuerte, que en ocasiones no generan resultados claros o estables, las soluciones de equilibrio se presentan como un refinamiento necesario e incluso suficiente para la predicción válida sobre el comportamiento de los jugadores. El *Equilibrio de Nash* es la forma de solución por equilibrios más común. En el juego  $G = \{S_1, S_2, \dots, S_n; u_1, u_2, \dots, u_n\}$ , decimos que el perfil de estrategias puras  $(s_1^*, s_2^*, \dots, s_i^*, \dots, s_n^*)$  es un Equilibrio de Nash (EN) si para cada jugador  $i$ ,  $u_i(s_1^*, s_2^*, \dots, s_i^*, \dots, s_n^*) \geq u_i(s_1^*, s_2^*, \dots, s_i, \dots, s_n^*) \quad \forall s_i \text{ de } S_i$ . Dicho de otra manera, para cada jugador  $i$ ,  $s_i^*$  es una solución al problema  $\max u_i(s_1^*, s_2^*, \dots, s_i, \dots, s_n^*)$  donde  $s_i$  es la variable de decisión.

De la definición anterior, se deduce que un EN es un perfil de estrategias del que ningún jugador desearía desviarse unilateralmente, puesto que contiene las estrategias que maximizan los pagos de cada jugador dadas las estrategias que predicen para ser usadas por el resto de jugadores. Sin embargo, esto no implica que el resultado sea el mejor posible de manera individual. El equilibrio de Nash es, por lo tanto, simple y efectivo en juegos finitos y de tamaño reducido, sin embargo, en el caso de los juegos infinitos donde es necesario plantear varios problemas de optimización simultáneos, no lo es. Sin embargo, en todos los casos es indispensable determinar el conjunto de estrategias óptimas que cada jugador podría elegir a cualquier combinación de estrategias elegidas por los otros jugadores.

## **Modelos de teoría de juegos estáticos con información completa**

### *2.1 MODELO DE BERTRAND*

El modelo de Bertrand es aplicable cuando existe un número reducido de empresas o competidores, que producen bienes idénticos y fijan un precio. Al fijar el precio al que cada empresa va a dar el producto, los compradores decidirán qué cantidad consumir a ese precio, con lo que se obtienen beneficios, por lo que se le da fin al juego (Fernández Ruíz, 2010). Para este tipo de modelo Ibarra

Zavala (2008) hace el supuesto de que los trabajadores tienen información perfecta y completa, y que la Industria de las AFORES está compuesta por dos empresas únicamente. Además, que estas empresas bajarán sus comisiones para atraer a los trabajadores, con lo que competirán en precios hasta el momento en que los beneficios privados sean iguales a cero (competencia perfecta), con tal de maximizar el número de clientes. Ibarra Zavala (2008) plantea varios modelos de teoría de juegos, entre ellos, el que corresponde a partir del 2008 donde las AFORES cobran comisiones únicamente sobre saldo. Para ello, toma al ahorro como numerario, de modo que cada unidad de tiempo el trabajador ahorre una unidad. El modelo planteado desde el punto de vista del trabajador es  $\max \varepsilon(1+r)$  mientras que desde el punto de vista de la AFORE  $\max \mu = (1+r)(1-\varepsilon) - c$ . Donde  $r$  es el rendimiento sobre los ahorros que las AFORES pagan a los trabajadores,  $s$  la comisión sobre saldo,  $c$  el costo de administración de las cuentas de los trabajadores y  $s = 1 - \varepsilon$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ . Ibarra Zavala (2008) indica que la solución a este modelo es  $\varepsilon = 0$ . Donde el monopolista (las empresas de AFORES) obtendría el ahorro más el rendimiento menos el costo, mientras que el consumidor obtendría cero. En la vida cotidiana es claro que, al consumidor no se le permite tener información completa y perfecta de las AFORES, esa podría ser una de las razones por las que la estructura de comisiones no ha conducido a una solución de competencia perfecta.

## 2.2 MODELO DE COURNOT

De acuerdo a Fernández Ruíz (2010) el modelo de Cournot analiza el comportamiento oligopólico de dos empresas que producen bienes idénticos. Se tienen dos empresas que incurren en un costo igual a  $c_i q_i$  al producir la cantidad  $q_i$ . Estas empresas compiten decidiendo sus niveles de producción sin conocer la decisión de su rival, pero conscientes de que el precio al que se venderá el producto dependerá de la producción de las dos empresas.

## 2.3 MODELO DE HOTELLING

De acuerdo a Fernández Ruíz (2010), este modelo nos habla de dos empresas que producen bienes diferenciados (alguna característica que los hace diferentes entre sí, aunque sean bienes similares), se elegirá simultáneamente el precio de cada producto, y se obtiene beneficios que dependen de los precios. El motivo por el cual bienes físicamente idénticos son valorados de manera distinta, es que los consumidores prefieren el bien ofrecido por una empresa si pueden adquirirlo más fácilmente que el de la otra; por ejemplo la cercanía de una empresa a otra, las facilidades de pago, estacionamiento, tiempo de espera, etc.

En el modelo de Hotelling se pueden diferenciar los productos de forma vertical u horizontal, la forma horizontal refleja que unos compradores prefieren un bien y otros el segundo bien, mientras que la diferenciación vertical nos habla de situaciones en las que un bien es mejor que otro. A continuación se explicara el modelo que estudia la diferenciación horizontal. Existen dos bienes que serán diferentes para los consumidores, pero unos consumidores prefieren un bien y otros el segundo. Para facilitar el análisis supondremos dos empresas situadas a lo largo de una calle, la empresa 1 está situada en el punto  $\alpha$ , y la empresa 2 se encuentra en el punto  $\beta$ . Si ofrecen los bienes al mismo precio, los consumidores que estén cerca de la empresa 1 preferirán el producto ofrecido por ésta, mientras que los consumidores cercanos a la empresa 2 preferirán su producto.

El consumidor tendrá una utilidad de comprar en cualquiera de las empresas igual a:  $[S - t(x - \alpha)^2 - p_1]$ , donde  $S$  representa la utilidad del bien,  $t(x - \alpha)^2$  representa el costo de desplazarse de una empresa a otra, y  $p_1$  representa el costo monetario. Así un consumidor que está parado en el punto  $x$  de la calle, comprará en la empresa 1 si la utilidad de comprar en la primera empresa es mayor que la utilidad de la segunda, como se muestra en la ecuación (1).

$$[S - t(x - \alpha)^2 - p_1] - [S - t(x - \beta)^2 - p_2] > 0 \quad (1)$$

En el punto  $x^*$  de la ecuación (2), el consumidor es indiferente entre comprar en la empresa 1 y la empresa 2.

$$[S - t(x^* - \alpha)^2 - p_1] - [S - t(x^* - \beta)^2 - p_2] = 0 \quad (2)$$

Donde  $x^* = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2t(\beta - \alpha)}$

Todos los consumidores a la izquierda de  $x^*$  preferirán la empresa 1 a la 2, así que tenemos la fracción de demanda de la empresa 1 en la ecuación (3) y de la empresa 2 en la ecuación (4).

$$q_1(p_1, p_2) = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2t(\beta - \alpha)} \quad (3)$$

$$q_2(p_1, p_2) = 1 - \beta + \frac{\beta - \alpha}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2t(\beta - \alpha)} \quad (4)$$

Los beneficios de ambas empresas se muestran, por lo tanto, en las ecuaciones (5) y (6).

$$u_1(p_1, p_2) = (p_1 - c) \left( \alpha + \frac{\beta - \alpha}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2t(\beta - \alpha)} \right) \quad (5)$$

$$u_2(p_1, p_2) = (p_2 - c) \left( 1 - \beta + \frac{\beta - \alpha}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2t(\beta - \alpha)} \right) \quad (6)$$

Nuestro estudio en esta ponencia se enfocará en definir un modelo de Hotelling aplicado a las decisiones que toman los trabajadores para cambiar de AFORE o no. Antes de plantear el modelo, en la siguiente sección se mostrará un resumen de las AFORES en México.

## **Sistema de Ahorro para el Retiro en México**

### *3.1 AFORES*

En una definición simple, AFORE, es la cuenta individual de ahorro para el retiro de los trabajadores en México. En los últimos años, se ha convertido en un punto importante para todos los que laboramos, ya que en base a los rendimientos que generan los recursos que obligatoriamente aportamos en ellas, las AFORES nos darán un beneficio pensado a largo plazo. Las AFORES, entonces, funcionan en base a cuentas previsionales individuales con las aportaciones del beneficiario, del empleador y del Estado. Dichas cuentas son capitalizadas por los ingresos que generan las inversiones efectuadas a través de una Sociedad de Inversión Especializada en Fondos para el Retiro (SIEFORE). Su funcionamiento está autorizado por la Secretaria de Hacienda y Crédito Público y son supervisadas por la Comisión Nacional de Ahorro para el Retiro (CONSAR).

De acuerdo a Asociación Mexicana de AFORES (AMAFORE), a partir del 1° de Julio de 1997, todas las personas que ingresan a un empleo y se registran como trabajadores ante el Instituto Mexicano del Seguro Social (IMSS) o Instituto de Seguridad y Servicios Sociales de los Trabajadores al Servicio del Estado (ISSSTE), obtienen una cuenta individual de ahorro para el retiro, en la cual, los trabajadores podrán ahorrar recursos hasta el día en que se retiren laboralmente. En esa cuenta se depositan todas las aportaciones que los trabajadores, el patrón y el gobierno hacen, además de las aportaciones adicionales que decide depositar voluntariamente el trabajador. La aportación total a la cuenta de afore de cada uno de los trabajadores es el equivalente al 6.5% de su salario base de cotización ante el IMSS. De ese 6.5%, su patrón aporta 5.15%, el trabajador 1.125 y el gobierno federal 0.225%.

A Julio de 2013, se encontraban en funcionamiento 12 operadoras de Afores en el país: Invercap, PensionISSSTE, Profuturo GNP, Principal, Inbursa, Banamex, XXI Banorte, MetLife, SURA, Afirme Bajío, Coppel, Azteca.

### 3.2 SIEFORES

El ahorro para el retiro se encuentra en la SIEFORE o fondo de inversión, esto es para que el dinero de la cuenta individual de los trabajadores genere rendimientos. Las SIEFORES tienen características definidas por las autoridades. A Agosto de 2013, existen 4 tipos de SIEFORES con un perfil diferente, dependiendo de la edad del trabajador.

En la Figura 1, podemos observar los 4 tipos de SIEFORE, y al rango de edad correspondiente a cada una de ellas.

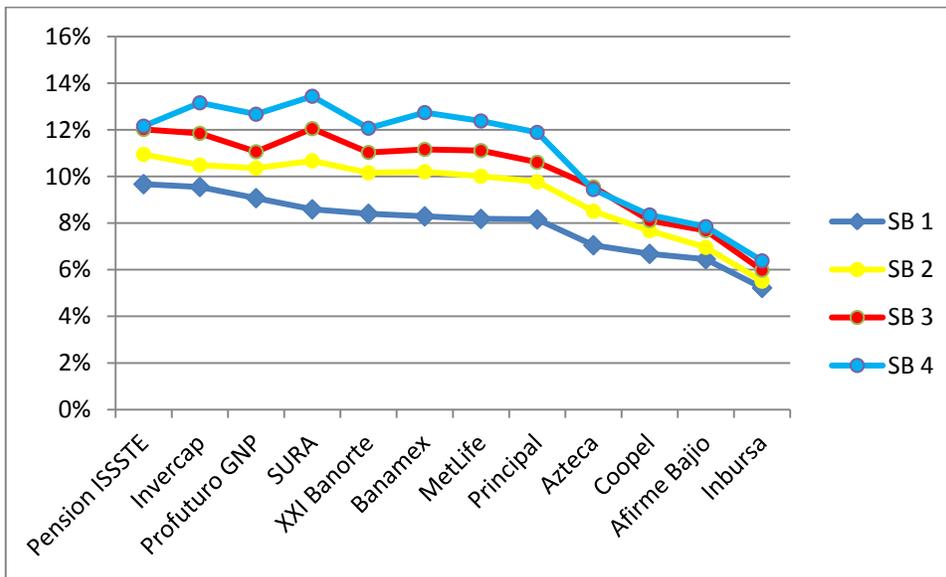
Figura 1. SIEFORES.



FUENTE: Elaboración propia con datos de la CONSAR a Julio de 2013.

Cada una de las operadoras de AFORES ofrecen diferentes rendimientos a los trabajadores dependiendo de la SIEFORE a la que pertenezca el trabajador de acuerdo a su edad, es decir, el rendimiento que cada trabajador tendrá será en función de su edad. La Figura 2, muestra los rendimientos a Julio de 2013 por SIEFORE y por AFORE.

Figura 2. Rendimientos Netos por SIEFORE y por AFORE.



Fuente: CONSAR a Julio de 2013.

Las SIEFORES invierten en:

- Inversión en Renta Variable Nacional
- Inversión en Renta Variable Internacional
- Inversión en Deuda Privada Nacional
- Inversión en Instrumentos Estructurados
- Inversión en Deuda Internacional
- Inversión en valores gubernamentales
- Inversión en mercancías

En base a la decisión que toman las operadoras de los fondos de los trabajadores, cada una armará su portafolio de inversión, que es no es otra cosa que la diversificación del dinero que administran en diferentes cuentas o fondos con los instrumentos mencionados asignando diferentes porcentajes para lograr un 100% de la inversión. Según el tipo de SIEFORE el porcentaje de inversión máximo y mínimo en renta fija y variable se encuentra fijado por la CONSAR, y las AFORES pueden tomar sus decisiones dentro de estos rangos máximos y mínimos.

La tabla 1, muestra las características de inversión que puede adoptar cada una de las SIEFORES de acuerdo a la regulación de la CONSAR.

Tabla 1: Características de inversión de las SIEFORES.

<b>SIEFORE</b>	<b>Edad</b>	<b>Instrumentos de Inversión</b>
SB1	60 años o más	Es el fondo con menor riesgo, y se permite invertir hasta un 20% en Valores extranjeros y hasta un 100% en renta fija. Máximo del 10% en renta variable
SB2	De 46 a 59 años	Máximo 15% en instrumentos estructurados Máximo 5% en mercancías. Máximo del 15% en renta variable Máximo 20% en valores extranjeros, Mínimo un 59% en renta fija.
SB3	De 37 a 45 años	Máximo 20% en instrumentos estructurados Máximo 10% en mercancías Máximo del 10% en renta variable Máximo 20% en valores extranjeros Mínimo un 50% en renta fija.
SB4	De 36 y menores años	Máximo 20% en instrumentos estructurados Máx. 10% en mercancías Máximo del 30% en renta variable Máximo 20% en valores extranjeros Mínimo un 30% en renta fija.

FUENTE: CONSAR, Disposiciones del régimen de inversión para sociedades.

Basado en datos de la CONSAR actualizados a Julio 2013 las AFORES manejan un total de 49.5 millones de cuentas, generando un valor mercado por 1,953,399.1 millones de pesos. Al cierre de Abril de 2013, los recursos administrados por las AFORES representaban el 13.4% del PIB, han crecido en los últimos 10 años en un 19.38% anual y representan el 22.92% del ahorro interno.

### **Metodología**

En esta sección de la ponencia se propone un modelo estático de teoría de juegos aplicados a las AFORES. Para ello, primero retomaremos el funcionamiento de la AFORE y SIEFORE en México. De acuerdo a la CONSAR, la competencia entre AFORES se daba anteriormente únicamente en comisiones, lo cual provocaba la falta de incentivos suficientes para buscar una mayor rentabilidad para los clientes y la insuficiente planeación de los portafolios de inversión por parte de las

SIEFORES que otorgaran mayores beneficios a los ahorros de los trabajadores. Es por ello que se dan los siguientes cambios legislativos:

- 1) Incentivar una sana competencia
- 2) Crear un Marco Regulatorio de inversiones adecuado.

La primera vertiente buscaba una competencia que agregue valor al afiliado, promoviendo mayores rendimientos a los trabajadores mediante la reducción de comisiones y otorgando mayores rendimientos, dando como resultado mejores rendimientos netos. La segunda vertiente, buscaba un marco regulatorio que permitiera la diversificación del riesgo, promoviendo diferentes opciones de inversión a los afiliados con preferencias y características diferentes y que evitara distorsiones del mercado. En pocas palabras, las AFORES actualmente compiten procurando mejores rendimientos a los trabajadores y cobrando un menor porcentaje de comisión que les permita mantenerse y beneficiar a los clientes.

Es importante mencionar que las AFORES, a través de las SIEFORES, entre más variados y mejor diversificados se encuentren sus portafolios de inversión, el rendimiento y las comisiones que ofrezcan serán mejores. Por lo cual, nuestro enfoque de teoría de juegos planteado en este trabajo se refiere principalmente a la toma de decisiones que realizan los trabajadores para elegir AFORE asumiendo que éste se guía únicamente por aquella que le ofrece un mayor beneficio, generando así una competencia entre ellas.

Para plantear este modelo de juegos, se observa que en el mercado de las AFORES se cuenta con productos similares, casi idénticos, pero con características únicas. Estos productos se pueden distinguir tanto en servicio al cliente, como en la disposición de vender, en el número de sucursales, o en la capacidad de los agentes de persuadir al cliente. Tras especificar estas características podemos partir de que se trata de un mercado en el que podemos aplicar un modelo basado en Hotelling. Esto es, un modelo estático con información completa y que el beneficio dependerá de un precio final. A continuación se plantea el modelo de Hotelling para las AFORES.

#### *Modelo: SISTEMA VS AFORE*

Para plantear nuestro modelo utilizamos la ecuación (1), es decir, el modelo de Hotelling clásico y se obtiene la ecuación (7) para las AFORES.

$$[S - td^2 - p_1] - [S - td^2 - p_2] = 0 \quad (7)$$

Donde:

$S$  = el rendimiento real del Índice de Precios y Cotizaciones (IPC)

$td$  = rendimiento bruto por AFORE

$p_i$  = comisión de la AFORE

Nuestro modelo lo planteamos como *Sistema vs AFORE*, dado que se realiza una comparación del sistema, el cual asumimos como el Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores, con los rendimientos reales que las AFORES otorgan a los trabajadores, visto como el rendimiento bruto menos la comisión cobrada. La ecuación (7) plantea la existencia de sólo 2 AFORES y que si la diferencia entre ellas es cero, el trabajador será indiferente hacia cuál elegir. En este trabajo, entonces, presentamos las diferencias  $[S - td^2 - p_1]$  por AFORE para realizar un comparativo entre ellas y dar recomendaciones de cuál elegir.

## Resultados

Las figuras 3 a la 14, muestran la utilidad (o pérdida) que obtuvo un trabajador en cada AFORE de Marzo de 2009 a Julio de 2013<sup>2</sup>, de acuerdo a nuestro modelo planteado de Hotelling y que hace referencia a las ecuaciones (5) y (6). Todas las cantidades se muestran en porcentaje. Las gráficas también muestran el promedio por AFORE en una línea recta.

Figura 3. Utilidad obtenida por el trabajador en Afirme Bajío

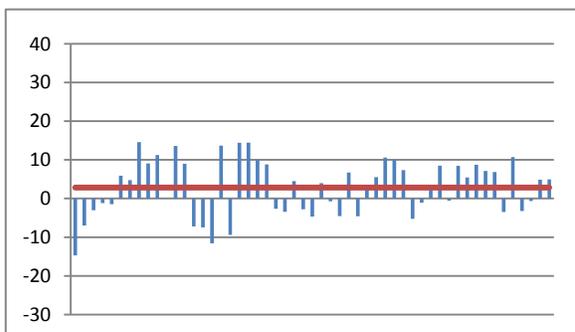
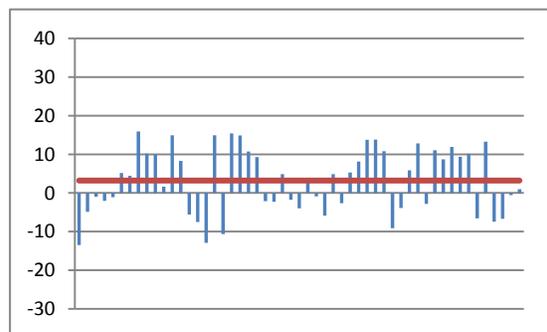


Figura 4. Utilidad obtenida por el trabajador en Azteca



<sup>2</sup> Únicamente para PensionISSSTE los datos están presentados de Diciembre de 2009 a Julio de 2013.

Figura 5. Utilidad obtenida por el trabajador en Banamex

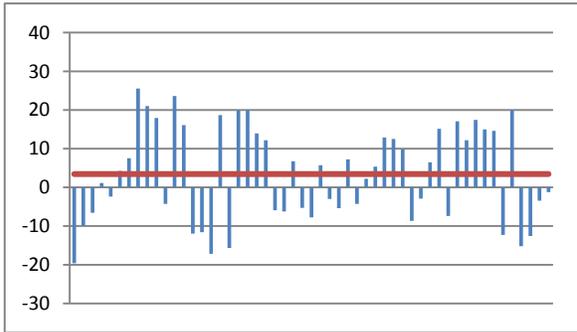


Figura 6. Utilidad obtenida por el trabajador en Coopel

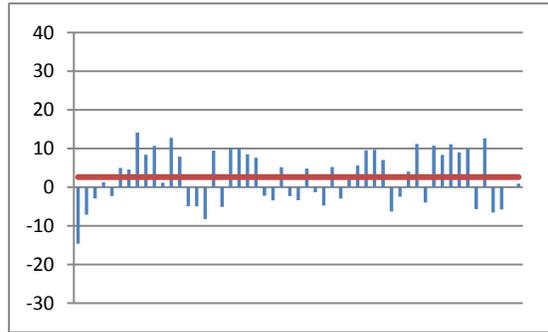


Figura 7. Utilidad obtenida por el trabajador en Inbursa

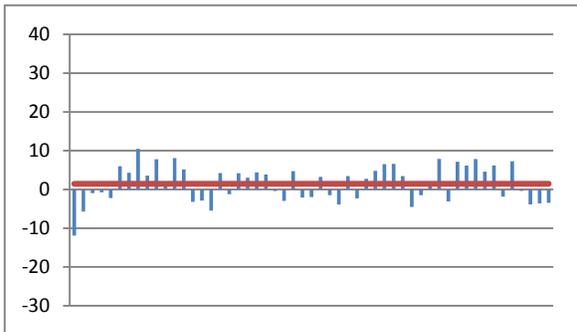


Figura 8. Utilidad obtenida por el trabajador en Invercap

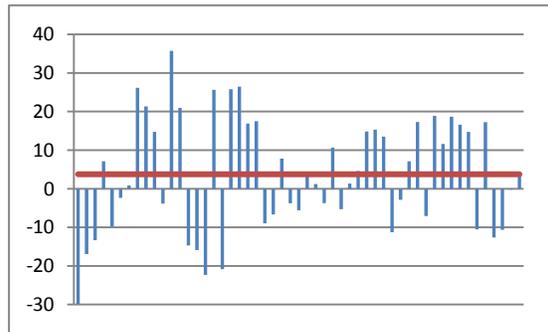


Figura 9. Utilidad obtenida por el trabajador en Metlife

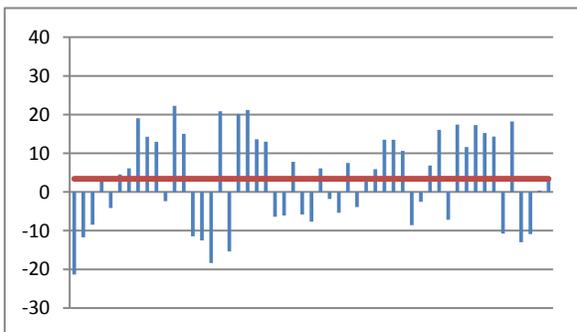


Figura 10. Utilidad obtenida por el trabajador en PensionISSSTE

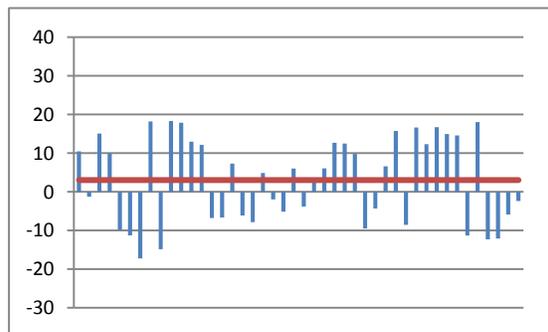


Figura 11. Utilidad obtenida por el trabajador en Principal

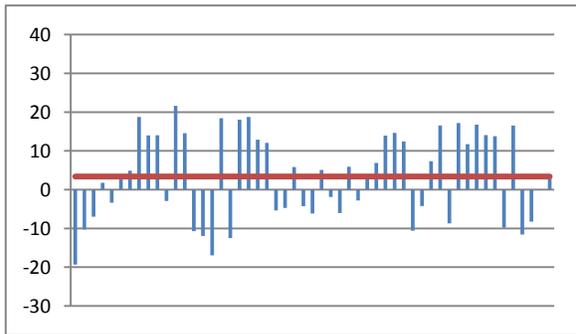


Figura 12. Utilidad obtenida por el trabajador en Profuturo GNP

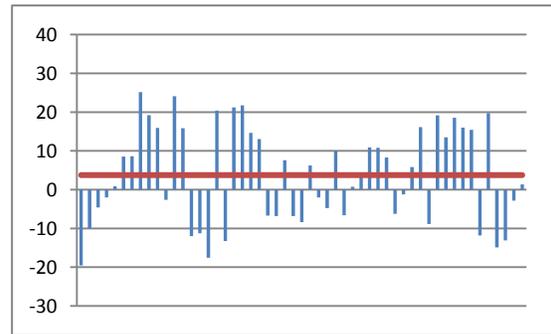


Figura 13. Utilidad obtenida por el trabajador en Sura

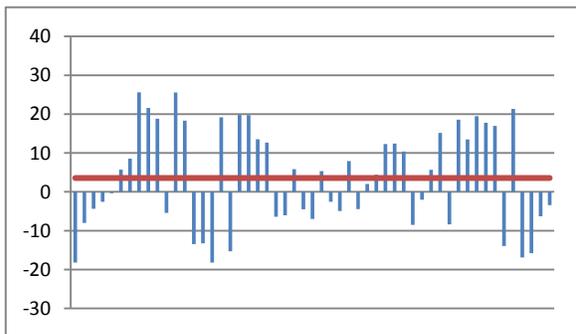
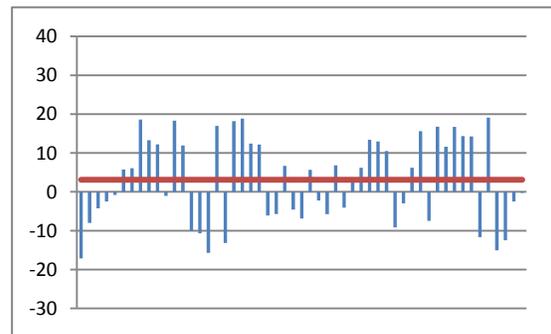


Figura 14. Utilidad obtenida por el trabajador en XXI Banorte



Fuente: Elaboración propia

Los resultados de las figuras 3 a la 14 muestran que existen diferencias significativas entre las 12 AFORES existentes. Una de las mayores diferencias se encuentra entre las AFORES Inbursa e Invercap (figuras 7 y 8). Esto es consistente con los rendimientos históricos de ambas AFORES, en donde Inbursa figura entre las de menor rendimiento histórico e Invercap entre las de mayor rendimiento. Así, entre las que se visualiza con menor utilidad están Coppel e Inbursa y las de mayor utilidad Banamex, Invercap, Metlife, Profuturo GNP y Sura.

Ahora bien, si un trabajador quisiera basar su decisión de en qué AFORE invertir utilizando este modelo; podría hacerlo comparando ya sea la utilidad promedio en cada una de ellas, la volatilidad en la utilidad, el coeficiente de variación, o bien, los valores en riesgo (VaR) a un cierto nivel de significancia. Todas estas medidas estadísticas se muestran en la tabla 2.

Tabla 2. Estadística descriptiva de la utilidad por AFORE.

<b>AFORE</b>	<b>Promedio</b>	<b>Volatilidad</b>	<b>Coefficiente de variación</b>	<b>VaR @ 5%</b>	<b>VaR @ 95%</b>
Afirme Bajío	2.8	7.3	259	-9.4	13.7
Azteca	3.2	8.3	260	-10.7	14.9
Banamex	3.4	12.3	359	-15.7	20.0
Coppel	2.6	7.0	265	-7.1	11.2
Inbursa	1.5	4.7	318	-5.4	7.8
Invercap	3.7	14.9	397	-20.8	25.8
Metlife	3.4	11.9	351	-15.4	20.2
PensionISSSTE	3.0	11.1	365	-14.9	18.1
Principal	3.4	11.2	329	-12.5	18.4
Profuturo GNP	3.8	12.4	330	-14.9	21.2
SURA	3.5	12.9	365	-16.9	21.3
XXI Banorte	3.1	11.0	353	-15.1	18.3

Fuente: elaboración propia.

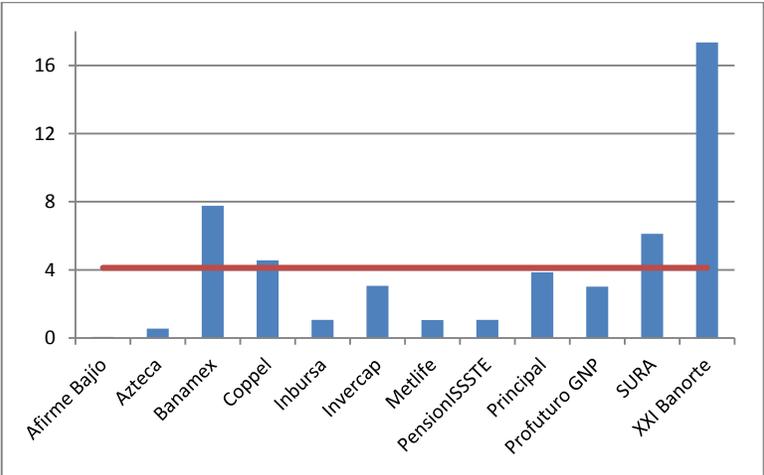
Para obtener los resultados de la tabla 2, se utilizó al promedio como un promedio simple, la volatilidad como la desviación estándar, el coeficiente de variación como la volatilidad entre el promedio y el VaR como la utilidad que se encuentra en el percentil deseado. Así para la toma de decisiones, se puede decir que si un trabajador es adverso al riesgo, podría basar su decisión de elección de AFORE en la que tenga un menor valor en riesgo al 5% de nivel de significancia, dado que el VaR muestra que existe una probabilidad del 5% de obtener un valor específico o menos de utilidad o pérdida durante este período. Esto es, para un trabajador adverso al riesgo la AFORE que le conviene elegir es Inbursa con un -5.4% de pérdida.

Cabe destacar que la aversión al riesgo tiene sus consecuencias, con Inbursa se obtienen menores pérdidas pero también menores ganancias, lo cual se puede visualizar con el VaR al 95% con un 7.8%. Por el contrario, un trabajador amante del riesgo, podría elegir con base al VaR al 95%, para determinar cuál AFORE le otorgaría una mayor utilidad, la cual es Invercap. Esto también tendría sus consecuencias, dado que Invercap es la segunda que mayor utilidad promedio otorga (sólo por debajo de Profuturo GNP) pero a una volatilidad muy alta (la más alta de todas). En ese sentido, podemos decir que Profuturo GNP conviene más que Invercap a los trabajadores, dado que su relación riesgo-rendimiento (medida con el coeficiente de variación) es mejor. Es decir, Profuturo GNP otorgó una mayor utilidad a un menor riesgo.

Entonces, un trabajador que quisiera elegir AFORE basándose en la relación riesgo-rendimiento histórico y que no sea ni adverso ni amante al riesgo sino encontrándose en un punto medio, elegiría Afirme Bajío, Azteca o Coppel dado que son las que menor coeficiente de variación muestran.

Por último, la figura 15 muestra la demanda que existe por AFORE, medida en total de cuentas administradas por cada una de ellas. Esta gráfica hace referencia a la demanda presentada en las ecuaciones (3) y (4) de nuestro modelo de Hotelling y se puede apreciar que la AFORE que tiene mayor demanda es XXI banorte seguida por Banamex y Sura; siendo las de menor demanda Azteca, Inbursa, Metlife y PensionISSSTE. Coppel y Principal están alrededor del promedio. En estos resultados se puede apreciar que los trabajadores en México no basan sus decisiones en la utilidad o riesgo que otorgan cada AFORE, sino en base a otros factores como la atención al cliente, conocidos dentro de la AFORE, etc. que podrían ser motivo de posteriores investigaciones.

Figura 15. Cuentas administradas por AFORE.



Fuente: elaboración propia con datos de la CONSAR a Julio de 2013.

**Conclusiones**

El estudio presentado en este trabajo aplica un modelo estático con información completa de teoría de juegos llamado “Modelo de Hotelling” al sistema de ahorro para el retiro actual en México, representado por las administradoras de fondos de ahorro para el retiro (AFORE). Para realizar la aplicación, se obtuvo primero la función de utilidad de Hotelling desde el punto de vista del trabajador. Así, se definió entonces a la utilidad como el exceso que obtendría un trabajador en su

rendimiento neto con la AFORE del rendimiento que obtendría con el índice de precios y cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores, representado por el IPC. El estudio se realizó para el período de Marzo de 2009 a Julio de 2013 y para las 12 AFORES existentes a ese periodo, que es el periodo para el cual existe información completa para todas las AFORES bajo estudio.

Los resultados de este estudio muestran que existen diferencias significativas entre las 12 AFORES y que para la elección de la mejor opción para el trabajador dependerá de las necesidades de cada uno. Entonces, se puede decir que si un trabajador es adverso al riesgo su mejor opción será Inbursa, mientras que si es amante al riesgo su mejor opción será Invercap. Se encontró también que la toma de decisiones puede basarse en la relación riesgo-rendimiento de la utilidad de cada una de las AFORES. Así, un trabajador podría decidir elegir Afirma Bajío, Azteca o Coppel si busca una relación óptima entre su volatilidad y rendimiento.

Para visualizar que las elecciones de AFORE por los trabajadores en México no son basadas en estas medidas estadísticas, se muestra la demanda por cada una de ellas a Julio de 2013 y se encuentra que la que mayor demanda tiene es XXI Banorte, seguida por Banamex y Sura. El desempeño de estas AFORES ha estado dentro del promedio y algunas veces se muestran por debajo de éste.

Por último, cabe destacar que la toma de decisiones en AFORES por los trabajadores en México se basa en diferentes factores, no sólo cuantitativos, por lo que sería de interés un estudio posterior para determinar cuáles son estos factores y qué grado de influencia tienen dentro de este tema.

## **Referencias**

- Akerlof, G. (1970) The Market of Lemons: Qualitative uncertainty and the Market Mechanism. *Quarterly Journal of Economics*, 84(3), 488-500.
- Aumann, R. J. y M. Maschler (1968) *Repeated Games with Incomplete Information: The Zero-Sum Extensive Game*. Report of the US Arms Control and Disarmament Agency/ST-143.
- Aumann, R. J. y M. Maschler (1967) *Repeated Games with Incomplete Information: A survey of recent results*. Report of the US Arms Control and Disarmament Agency/ ST-116.
- Harsanyi, J. C. (1967) Games with incomplete information played by bayesian players (Parts I, II and III). *Management Science*, 159-182.

- Meca Martínez, A. (s.f.) Génesis y Evolución de la Teoría de Juegos. Sus Orígenes en España. *Artículos de Investigación Operativa*.
- Meca Martínez, A. (1997) Génesis y Evolución de la Teoría de Juegos. Sus Orígenes en España. *Artículos de Investigación Operativa*, 15-22.
- Mertens, J. F. y S. Zamir (1982) Formalization of Harsanyi's Notion of Type and Consistency in Games with incomplete information. *C.O.R.E. Discussion Paper*.
- Myerson, R. B. (1985) Bayesian Equilibrium and Incentive-Compatibility: An Introduction. *Game Theoretic Models of Bargaining*. Cambridge University Press.
- Myerson, R. B. (1984) Two-person Bargaining problems with Incomplete Information. *Econometrica*. Discussion Paper 527.
- Myerson, R. B. (1984) Cooperative Games with Incomplete Games. *International Journal of Game Theory*. Discussion Paper 528.
- Nash, John F. (1951) Non-cooperative games. *The Annals of Mathematics*, 54, 286-295.